# DIAGONALIZZAZIONE DI MATRICI.

Sia $\mathbb{K}$ un campo, $A \in \mathbb{K}^{n,n}$

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$$ lineare → endomorfismo

Quando vale $f_A(\bar{v}) \in L(\bar{v})$ ?

cioè $AX = \lambda X$ per $\lambda \neq 0$.

$\bar{v} = \underline{0}$ questo caso c'è sempre e quindi NON CI INTERESSA

**Def:** Sia $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lineare. Si dice autovettore per $f_A$ ogni vettore $\bar{v} \in \mathbb{K}^n$, $\bar{v} \neq \underline{0}$ tale che $f_A(\bar{v}) \in L(\bar{v})$.

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$ $X \in \mathbb{K}^{n,1}$ è autovettore per $A$ se $X \neq \underline{0}$ e $\exists \lambda \in \mathbb{K}$: $AX = \lambda X$

⚠ $X \neq \underline{0}$, ma $\lambda$ può essere $= 0$. In particolare $\forall X \in \ker(A)$, $X$ è autovettore.

Sia $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, $X \in \mathbb{K}^{n,1}$ un autovettore per $A$.
Allora si dice **autovalore** di $A$ associato all'autovettore $X$ il $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $\boxed{AX = \lambda X}$.

$$AX = \lambda X \iff AX = \lambda I X$$
$$\iff (A - \lambda I)X = \underline{0}$$
$$\iff X \in \ker(A - \lambda I).$$

osservazioni 1) $\exists$ autovettori di autovalore $\lambda$ $\iff$
$\ker(A - \lambda I) \neq \{\underline{0}\}$.
ovvero $\operatorname{rk}(A - \lambda I) < n$ cioè
$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

2) $\forall \lambda$ autovalore di $A$,
$$\boxed{V_\lambda := \ker(A - \lambda I)}$$

coincide con l'unione dell'insieme di tutti gli autovettori di autovalore $\lambda$ con $\lambda \neq \lambda$ ed è uno spazio vettoriale.

$$\dim V_\lambda = n - rk(A - \lambda I)$$

**Def**: Si dice spettro di $A$ l'insieme di tutti gli autovalori di $A$

$$\boxed{Spec(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \det(A - \lambda I) = 0\}}$$

Sia $\lambda \in Spec(A)$. Si dice autospazio di autovalore $\lambda$ lo sp. vettoriale

$$\boxed{V_\lambda := Ker(A - \lambda I)}$$

Il numero $\boxed{m_g(\lambda) := \dim V_\lambda}$ è detto molteplicità geometrica di $\lambda$.

L'equazione $\det(A - xI) = 0$ è detta **equazione caratteristica** di $A$ mentre il polinomio $p_A(x) := \det(A - xI)$ è detto **polinomio caratteristico** di $A$

oss 1) Gli autovalori di $A$ sono esattamente le **radici del polinomio caratteristico** = = soluzioni dell'equazione caratteristica

Def: $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ chiamiamo **molteplicità algebrica** di $\lambda$ il numero di volte che $\lambda$ è radice del polinomio caratteristico.

$m_a(\lambda)$

$$\left( (x-\lambda)^{m_a(\lambda)} \mid p_A(x) \text{ ma } (x-\lambda)^{m_a(\lambda)+1} \nmid p_A(x) \right)$$

↑ divide ↑ non divide.

2) $\deg p_A(x) = \deg \det(A - xI) = n$

conseguentemente

$$\boxed{\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} m_a(\lambda) \leq n}$$

Se $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso (e.g. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) allora

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} m_a(\lambda) = n$$

⌟

**Lemma:** Siano $A$ e $B$ due matrici simili, cioè $\exists P \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che

$$A = P^{-1} B P$$

$\Rightarrow$ $A$ e $B$ hanno lo stesso polinomio caratteristico.

$\rightarrow$ in particolare $\det(A) = p_A(0) = \det(B)$ e $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(B)$ hanno gli stessi autovalori.

**Dim:**

$$p_A(x) = \det(A - xI) = \det(P^{-1} B P - x P^{-1} P) = *$$

$$p_B(x) = \det(B - xI)$$

$$* = \det(P^{-1}(B - xI)P) = \det(P^{-1}) \det(B - xI) \det(P) =$$

$$= \det(B - xI) = p_B(x) \qquad \square$$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ $\quad P_A(x) = \det(A - xI) =$

$= \det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1$

$Spec_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$ $\quad P_A(x) = x^2 + 1$

$Spec_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, +i\}.$

$V_{-i} = Ker(A + iI) = \left\{ \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \right\} =$

$= \mathcal{L}((1, -i))$

$V_i = Ker(A - iI) = \mathcal{L}((1, +i))$

per trovare autovettori di $A \in \mathbb{K}^{n,n}$

1) Si calcola $Spec(A)$

2) $\forall \lambda \in Spec(A)$ si calcola $V_\lambda$.

DIAGONALIZZABILITÀ.

**Def:** Una matrice $A$ è detta **diagonalizzabile** se e solo se essa è simile ad una matrice $D$ diagonale

$A$ diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\boxed{A = PDP^{-1}}$ con $D$ diagonale e $P \in GL(n, \mathbb{K})$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\exists P \in GL(n, \mathbb{K}) : AP = PD}$

la matrice $P$ in questo caso è detta **matrice diagonalizzante**

⚠ Il prodotto di matrici non è commutativo

$AP = PD \ [\Leftrightarrow A = PDP^{-1}]$

è diverso da $PA = PD$ !!

$PA = PD$ con $P \in GL(n, \mathbb{K}) \Leftrightarrow A = D$

⚠ La diagonalizzante è $P$ e non $P^{-1}$

**Teorema:** Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}^{n,1}$ ammette una base di autovettori per $A$.

**Dim:** $A$ diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists P \in GL(n, \mathbb{K})$ e $D$ diagonale tali che $AP = PD$.

Siano $C_1 \dots C_n$ le colonne di $P$ e $\lambda_1 \dots \lambda_n$ le

entrate sulla diagonale di D.

$AP = PD$ diventa

$$A[c_1 \dots c_n] = [c_1 \dots c_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$[Ac_1\ Ac_2 \dots Ac_n] = [\lambda_1 c_1\ \lambda_2 c_2 \dots \lambda_n c_n]$$

e dunque $Ac_1 = \lambda_1 c_1 \rightarrow c_1 \in V_{\lambda_1}$

$\vdots$

$Ac_n = \lambda_n c_n \rightarrow c_n \in V_{\lambda_n}$

$\Rightarrow (c_1\ c_2 \dots c_n)$ devono essere tutti autovettori di $A$

inoltre poiché $P$ deve essere invertibile $c_1 \dots c_n$ devono essere una sequenza libera $\Rightarrow$ base di $\mathbb{K}^n$ ☐

Viceversa: se $c_1 \dots c_n$ base di autovettori per $A$

$\Rightarrow \exists \lambda_1 \dots \lambda_n : Ac_1 = \lambda_1 c_1 \dots Ac_n = \lambda_n c_n \Rightarrow$

$\Rightarrow A(c_1 \dots c_n) = (Ac_1 \dots Ac_n) = (\lambda_1 c_1 \dots \lambda_n c_n)$

$$= (c_1 \dots c_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

e $P = (c_1 \dots c_n)$ matrice $n \times n$ invertibile. □

<u>Oss</u>: Il teorema dice che $A$ diag. $\Leftrightarrow \mathbb{K}^n$ ammette una base di autovettori $\Leftrightarrow \mathbb{K}^n$ è la somma degli autospazi di $A$ (perché ogni vettore di $\mathbb{K}^n$ si deve poter scrivere come somma di autovettori).

$$\sum_{\lambda \in Spec(A)} V_\lambda = \mathbb{K}^n$$

$$\dim\left(\sum_{\lambda \in Spec(A)} V_\lambda\right) = n$$

**Teorema:** Gli autospazi di $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono sempre in somma diretta.

Conseguenza:
$$\dim\left(\bigoplus_{\lambda \in Spec(A)} V_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in Spec(A)} \dim(V_\lambda) =$$
$$= \sum_{\lambda \in Spec(A)} m_g(\lambda)$$

In particolare
1) $A$ diag $\iff \sum m_g(\lambda) = n$
2) $\sum m_g(\lambda) \leq n$
3) La scelta di una base di autovettori è data dalle basi in autospazi.

NON È POSSIBILE AVERE BASI DI AUTOVETTORI DIFFERENTI IN CUI GLI AUTOVETTORI ASSOCIATI AD UN FISSATO AUTOVALORE $\lambda$ SONO ~~DIVERSI~~ IN NUMERO DIFFERENTE

→ LA MATRICE D È IDENTIFICATA UNIVOCAMENTE A MENO DI PERMUTARE LE ENTRATE SULLA DIAGONALE.

→ Se $m_g(\lambda_1) = a_1 \Rightarrow$ D conterrà $\lambda_1$ esattamente $a_1$ volte !!

DIM: per induzione sul numero $t$ di autospazi.

$t=2$ : Siano $\lambda_2 \neq \lambda_1$ due autovalori $\Rightarrow$

$\forall X \in V_{\lambda_1} : AX = \lambda_1 X \quad \forall X \in \lambda_1 : AX = \lambda_2 X$

$\Rightarrow$ se $\exists X \neq \underline{0} : X \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$ abbiamo

$\lambda_2 X = AX = \lambda_1 X \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)X = AX - AX = \underline{0}$

$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)X = \underline{0}$

ma $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow X = \underline{0}$ $\lightning$

quindi $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$ .

$(t-1) \Rightarrow t$ $(\lambda_2 \dots \lambda_{t-1}, \lambda_t)$ tutti autovalori distinti

$S := V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_{t-1}} + V_{\lambda_t}$ supponiamo non sia diretta.

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \bar{v}_2 + \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_{t-1} + \bar{v}_t \\ &= \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \dots + \bar{w}_{t-1} + \bar{w}_t \end{aligned} \quad \text{con } \bar{v}_i, \bar{w}_i \in V_{\lambda_i}$$

$A\bar{v} = A(\bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_{t-1} + \bar{v}_t) = \lambda_1 \bar{v}_2 + \lambda_1 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_{t-1} \bar{v}_{t-1} + \lambda_t \bar{v}_t$

$= A(\bar{w}_1 + \dots + A\bar{w}_t) = \lambda_2 \bar{w}_2 + \dots + \lambda_t \bar{w}_t$ .

$$\lambda_t \bar{v} = \lambda_t \bar{v}_1 + \lambda_t \bar{v}_2 + \dots + \lambda_t \bar{v}_{t-1} + \lambda_t \bar{v}_t$$

$$A\bar{v} = \lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_{t-1} \bar{v}_{t-1} + \lambda_t \bar{v}_t$$

$$(A\bar{v} - \lambda_t \bar{v}) = (\lambda_1 - \lambda_t)\bar{v}_1 + \dots + (\lambda_{t-1} - \lambda_t)\bar{v}_{t-1} + \underline{0}$$

$$\in V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_{t-1}}$$

$$(A\bar{v} - \lambda_t \bar{v}) = (\lambda_1 \bar{w}_1 - \lambda_t \bar{w}_1) + \dots + (\lambda_{t-1} \bar{w}_{t-1} - \lambda_t \bar{w}_{t-1}) + \underline{0}$$

$$\in V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_{t-1}}$$

per ipotesi induttiva i vettori blu e verdi coincidono.

$$(\lambda_1 - \lambda_t)\bar{v}_1 = (\lambda_1 - \lambda_t)\bar{w}_1$$

$$(\lambda_2 - \lambda_t)\bar{v}_2 = (\lambda_2 - \lambda_t)\bar{w}_2$$

etc.

$\Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{w}_1 \ldots \bar{v}_2 = \bar{w}_2 \ldots \bar{w}_{k-1} = \bar{v}_{k-1}$

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \ldots + \bar{v}_{k-1} + \bar{v}_k =$$
$$= \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \ldots + \bar{w}_{k-1} + \bar{w}_k =$$
$$= \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \ldots + \bar{v}_{k-1} + \bar{w}_k$$

$\Rightarrow \bar{w}_k = \bar{v}_k \Rightarrow \bar{v}$ si scrive in modo unico come vettore di $V_{x_1} + \ldots + V_{x_k}$

e dunque $V_{x_1} \oplus V_{x_2} \oplus \ldots \oplus V_{x_k}$ □

**Teorema:** $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(A)$

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

$\deg p_g(x) = n \Rightarrow \sum m_a(\lambda) \leq n$

$\oplus V_{\lambda_i} \Rightarrow \sum m_g(\lambda) \leq n$

**DIM:**

- $m_g(\lambda) \geq 1 \quad \forall \lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ in quanto

  $\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$

  $\Rightarrow \dim \ker(A - \lambda I) \geq 1$

- Supponiamo $m_g(\lambda) = t$ e mostriamo $m_a(\lambda) \geq t$

Se $m_g(\lambda) = t \Rightarrow \dim V_\lambda = t \Rightarrow$ esistono $t$ autovettori $c_1 \dots c_t$ per $A$ linearmente indipendenti. Siano $E_{t+1} \dots E_n$ dei vettori che completano a base $c_1 \dots c_t$ e poniamo

$$Q = [C_1 \dots C_t \; E_{t+1} \dots E_n]$$

Consideriamo

$$AQ = [AC_1 \; AC_2 \dots AC_t \; AE_{t+1} \dots AE_n]$$

$$= [\lambda C_1 \; \lambda C_2 \dots \lambda C_t \; AE_{t+1} \dots AE_n] =$$

$$= [C_1 \; C_2 \dots C_t \; AE_{t+1} \dots E_n] \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \\ \hline 0 & & W \end{bmatrix} =$$

$$= [\lambda_1 C_1 \dots \lambda_t C_t \; E_{t+1} W \dots E_n W]$$

$$Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} \lambda & & & W_1 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ \hline 0 & & & W_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} t \\ \} n-t \end{matrix}$$

($t$ colonne, $n-t$ colonne)

$$\det(A - xI) = \det\left(\left[\begin{array}{c|c} \lambda I_t & \omega_1 \\ \hline 0 & \omega_2 \end{array}\right] - xI\right) =$$

$$= (\lambda - x)^t \det(\omega_2 - x I_{n-t})$$

$\Rightarrow$ $(\lambda - x)^t$ divide il polinomio caratteristico

$\Rightarrow$ $m_a(\lambda) \geq t$

□

Es. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathrm{Spec}(A) = \{1\}$ $\quad \det(A - xI) = (1-x)^2$

$m_a(1) = 2$

$m_g(1) = n - \mathrm{rk}(A - I) = n - \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

oss:

A diagonalizzabile $\iff \sum m_g(\lambda) = n$

ma $\sum m_g(\lambda) \leq \sum m_a(\lambda)$

$\Rightarrow$ deve $\sum m_a(\lambda) = n$

inoltre se vale questo deve essere $\sum m_g(\lambda) = \sum m_a(\lambda) = n$

e quindi: $\forall \lambda \in Spec(A): m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$

Def: $\lambda \in Spec(A)$ è regolare se

$$m_a(\lambda) = m_g(\lambda).$$

A è diagonalizzabile $\iff \sum m_a(\lambda) = n$ & ogni autovalore è regolare.